Inspectoratul Şcolar Judeţean Buzău

Olimpiada de matematică

faza locală

Clasa a 12-a, Soluţii şi bareme

1. Pe mulţimea $M = \mathbb{R} - \{3\}$ se defineşte legea

$$x * y = 3\left(xy - 3x - 3y\right) + m,$$

unde $m \in \mathbb{R}$.

Să se determine toate valorile lui m pentru care $(M, *)$ are structură de grup.

Soluţie. Singura valoare este $m = 30$.Într-adevăr, dacă $m = 30$, atunci

$$x * y = 3(x-3)(y-3) + 3,$$

şi dacă $x, y \neq 3$, atunci $x * y \neq 3$, astfel, M este stabilă faţă de legea dată.

Asociativitatea se verifică imediat

Elementul neutru este $e = 3 + \frac{1}{3}$:

$$x * \left(3 + \frac{1}{3}\right) = 3\left(x-3\right)\frac{1}{3} + 3 = x,$$

pentru orice $x \in M$.

În fine, pentru $x \in M$, fie $x' = \frac{1}{9(x-3)} + 3 \in M$. Avem

$$x * x' = 3\left(x-3\right)\frac{1}{9\left(x-3\right)} + 3 = \frac{1}{3} + 3 = e,$$

deci orice element din M e inversabil. Rezultă că M este grup. .... (4 p)

Reciproc, fie $m \neq 30$ şi elementele $x = 0 \in M$, $y = \frac{m-3}{9} \in M$, (deoarece $m \neq 30$). Avem

$$x * y = 3\left(xy - 3x - 3y\right) + m = -9y + m = -m + 3 + m = 3 \notin M,$$

deci M nu poate fi grup. .... (3 p)

2. Să se calculeze

a)$\int e^{\sqrt{x}}dx$.

b)$\int \sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx$.

Soluţie. a) Avem

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{x}}dx &= \int 2\sqrt{x}\left(e^{\sqrt{x}}\right)'dx = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - \int\left(2\sqrt{x}\right)'e^{\sqrt{x}}dx \\ &= 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - \int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + \mathcal{C}.\end{aligned}$$

.... (4 p)

b) Similar,

$$\int\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx = \int 2x\left(e^{\sqrt{x}}\right)'dx = 2xe^{\sqrt{x}} - 2\int e^{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}}\left(x - 2\sqrt{x} + 2\right) + \mathcal{C}.$$

.... (3 p)

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie care admite primitiva F. Să se arate că

a) f este impară $\Longleftrightarrow$ F este pară;

b) F este impară $\Longrightarrow$ f este pară.

Soluţie. a) Presupunem f impară. Fie $G\left(x\right) = F\left(x\right) - F\left(-x\right)$; atunci $G'\left(x\right) = f\left(x\right) + f\left(-x\right) \equiv 0$, deci G e constantă. Cum $G\left(0\right) = 0$, rezultă $G \equiv 0$, deci F pară. .... (4 p)

Presupunem F pară, deci $F\left(x\right) = F\left(-x\right)$. Derivând, obţinem $f\left(x\right) = -f\left(-x\right)$, deci f e impară... (2 p)

b) Avem $F\left(x\right) = -F\left(-x\right)$, de unde, prin derivare, $f\left(x\right) = f\left(-x\right)$ .... (1 p)